MATEMATISK INTUISJON
OG DETS BEHOV FOR ONTOLOGISK AVKLARING

Av Carl W. Korsnes

Intuisjon innen matematikkens filosofi kan spores tilbake til Aristoteles.[1] I en sammenlikning mellom en matematiker og en fysiker, forklarer Aristoteles at en matematiker i bevisstheten separerer overflater, linjer osv. *fra* de fysiske objektene det gjelder. «Mens geometri utforsker fysiske lengder, men ikke *som* fysiske, undersøker optikk matematiske lengder, men *som* fysiske, ikke *som* matematiske» (Aristoteles 1941:B2,193b23–194a12).[2] Å forklare denne relasjonen mellom det abstrakte og det konkrete utgjør en filosofisk hard nøtt å knekke. Aristoteles hevdet at det abstrakte eksisterte *i* det konkrete, og den umiddelbare prosessen som finner sted når vi oppfatter dette abstrakte – for eksempel at et juletre er trekantet – kan kalles intuisjon. Når vi i denne artikkelen skal gå gjennom to senere filosofers – L.E.J. Brouwers og Kurt Gödels - drøfting av matematisk intuisjon, påpeker jeg viktigheten av å klargjøre hva som faktisk er *gjenstand* for intuisjonen. Hva innebærer matematiske objekters ontologiske *abstrakthet*? I hvilken grad er matematiske objekter *uavhengige*? Dette er sentrale ontologiske spørsmål, som utgjør første steg i en avklaring på hvordan abstrakte objekter blir, eller kan bli, oppfattet ved intuisjon.

Denne viten man har på forhånd, som er umiddelbar og fremstår som troverdig, oppnår man ved *intuisjon.*

1. Intuisjon – hva er det egentlig?

L.E.J. Brouwer og Kurt Gödel er filosofer som har presentert to svært forskjellige versjoner av matematisk intuisjon. Mens Brouwers *intuisjonisme* representerer et «ontologisk ytterpunkt», hvor matematiske objekter defineres som resultat av vår subjektive bevissthet, er Gödels redegjørelse for intuisjon i tråd med matematisk platonisme og står med det for et annet ontologisk ytterpunkt. Denne artikkelen vil kritisk drøfte disse to intuisjonsbegrepenes ontologiske utgangspunkt og peke på flere forklaringsutfordringer ved de to teoriene. Jeg argumenterer for at disse utfordringene er direkte forbundet med nettopp teorienes *ontologiske* ståsted. Til slutt viser jeg hvordan et skifte i ontologisk utgangspunkt kan synes mer kompatibelt med begrepet om *intuisjon av abstrakte objekter* som grunnlag for vår forståelse av matematikk. Dersom tall og geometri defineres som abstrakte *strukturer* ved den objektive virkeligheten, i stedet for uavhengige objekter, argumenterer jeg for at intuisjon ikke lenger er en *obskur*, men heller en *plausibel*, forklaring på hvordan vi oppnår kunnskap om disse. Interessant nok kan det hevdes at dette ontologiske utgangspunktet har flere likheter med Aristoteles' matematikkfilosofi. Før vi tar fatt på drøftingen av disse forskjellige versjonene av intuisjon, er det nyttig å ha et aldri så lite overblikk over hvordan intuisjon kan defineres filosofisk.

Intuisjon kan forstås som glimt av en slags «høyere» innsikt, og kan derfor først fremstå som «intellektuell synsing». Av den grunn at intuisjon *ikke* kommer inn under kategorien rasjonell tenkning kan begrepet betraktes som *synsing.* Å betrakte intuisjon som synsing samsvarer dog ikke med den opprinnelige betydningen av ordet «intuisjon», fra *intueri* (lat.), som betyr 'å kontemplere', 'å se på' eller 'å granske'. I denne artikkelen tar vi utgangspunkt i den opprinnelige betydningen av intuisjon, da det forhåpentlig vil komme frem av artikkelen at intuisjon kan argumenteres for å være mer konkret enn «intellektuell synsing». Intuisjonsbegrepet vekker både filosofisk interesse og forklaringsproblemer, nettopp fordi begrepet er vanskelig å forklare rasjonelt. Det er altså langt fra noen enighet om hva intuisjon er, men visse særegenheter ved intuisjon synes å gå igjen: (1) Direkthet: Kunnskapen man får ved intuisjon er *umiddelbar* og (2) Troverdighet: Det som oppfattes ved intuisjon *fremstår* som troverdig.

Dagfinn Føllesdal forteller illustrativt at det ikke nytter å gå til patentkontoret ved Stanford University med en ny matematisk likning, ettersom en ny likning slett ikke regnes som en oppfinnelse.

Som det vil komme frem av artikkelen er det flere tolkninger av intuisjon, alt fra spontan bedømmelse eller synsing, til en spesiell presentasjon av nødvendige sannheter. Eksempler på hva som kan oppfattes ved hjelp av intuisjon virker muligens oppklarende:

(a) 2 + 2 = 4

Eller kanskje mindre kontroversielt:

(b) Jeg eksisterer

Hvordan vet vi at (a) eller (b) er sanne? Jo, det er *intuitivt*. Følger man denne slutningen kan vi ikke *vite* hverken (a) eller (b) ved logiske slutninger/argumenter, da de heller presenterer seg for oss som umiddelbart troverdige. Men er det ikke nettopp *argumenter* eller *logiske slutninger* mennesker – og i hvert fall filosofer – søker etter i forklaringer? Det skal sies at Descartes' *cogito*-slutning har oppnådd stor oppslutning som en *forklaring*

Illustrasjon: Lana Svirejeva

på at man kan være sikker på sin eksistens (påstand (b)) – i hvert fall i form av å tenke – men det kan argumenteres for at *cogito*-slutningen forklarer noe man egentlig vet fra før. Man trenger ikke *cogito*-slutningen for å være klar over at man eksisterer; Descartes' slutning fungerer heller som en ytterligere bekreftelse på noe man egentlig visste. Nettopp her kommer intuisjon inn i bildet. Denne viten man har på forhånd, som er umiddelbar og fremstår som troverdig, oppnår man ved *intuisjon*.

I matematikkens filosofi er det dog enda et spørsmål som stilles, nemlig: *Hva* er det man oppfatter ved (matematisk) intuisjon? Vi refererer til tall og geometriske former som *objekter*[3] uten tilsynelatende problemer, men det er åpenlyst at dersom det finnes matematiske objekter er de annerledes enn konkrete objekter. Blant annet gjør matematiske objekters abstrakte natur oss mindre sikre på disse tilsynelatende objektenes eksistens, eller i hvert fall mindre sikre på deres eksistens*måte* – altså, på *hvordan* de eksisterer. Ifølge Brouwer er matematiske objekters, eller matematiske sannheters eksistens nært knyttet til den menneskelige bevissthet.

2. Brouwers intuisjonisme

a. Ubesvarte spørsmål om matematikkens objektivitet i Brouwers intuisjonisme

Når en matematiker kommer frem til et nytt matematisk bevis, gjøres da en *oppdagelse* eller en *oppfinnelse*? Dagfinn Føllesdal forteller illustrativt at det ikke nytter å gå til patentkontoret ved Stanford University med en ny matematisk likning, ettersom en ny likning slett ikke regnes som en oppfinnelse.[4] Matematikkens slående objektivitet synes altså å peke mot førstnevnte alternativ: En matematisk likning er en oppdagelse av noe som eksisterer. Matematikkens tilsynelatende objektivitet utgjør et sentralt aspekt som det er nødvendig å kunne redegjøre for i enhver matematikkfilosofisk teori. Brouwer anså matematikken som *menneskeskapt* og forsøkte å sette i gang en matematisk revolusjon med sin teori om matematisk intuisjonisme. Brouwer diskuterte omhyggelig *konsekvensene* av en intuisjonistisk matematikk, men fundamentet intuisjonismen hans bygger på synes å forklares mindre tydelig. Vi vil se at Brouwer lar spørsmål om matematikkens objektivitet, eller intersubjektivitet, stå mer eller mindre ubesvart. Inspirert av Kants matematikkfilosofi gir han dog forklaringen på vår forståelse av matematikk ved å vise til vår tidsoppfattelse, som er tilsynelatende fundamental ved den menneskelige bevisstheten.

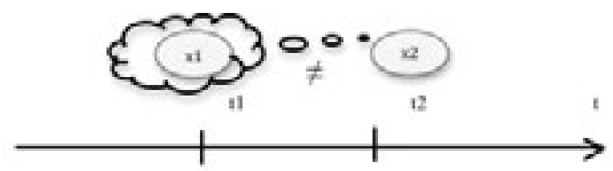
b. 'Tiden går, tanken består': Brouwers To-én-het[5]

Brouwer hevder at matematikk er en mental konstruksjon, og med det essensielt subjektiv (Iemhoff 2013). Spørsmålet om matematikkens tilsynelatende objektive karakter besvares av Brouwer ved å vise til grunnleggende trekk ved *den menneskelige bevisstheten*. Brouwer hevder at det er først når matematiske sannheter bevises at de eksisterer; med andre ord finnes det ingen ubeviste matematiske sannheter. Ved hardnakket å vektlegge *bevis* fremfor *sannhet*, utgjør Brouwers filosofiske prosjekt et forsøk på å danne et sikkert ontologisk *og* epistemologisk grunnlag for matematikken. Men er det ontologiske grunnlaget så sikkert? La oss først drøfte hvordan Brouwer forklarer intuisjonismen *epistemologisk.*

Ifølge Brouwer er matematikken en mental struktur som bygger på vår oppfattelse av tid; vår tidsoppfattelse fremtrer i Brouwers tekster som et selvinnlysende grunnleggende fenomen ved bevisstheten. Vår tidsoppfattelses *a priori* karakter er nettopp det som gjør matematikken til en mental struktur som bygger på *intuisjon*. Brouwer utdyper at intuisjonismen,

> …anser oppløsningen av øyeblikk i livet til kvalitativt forskjellige deler, som gjenforenes kun mens separert av tiden, som det menneskelige intellekts fundamentale fenomen, gående ved abstrahering fra dets emosjonelle innhold over i det fundamentale fenomenet matematisk tenkning, intuisjonen av den blotte to-én-heten. … Denne intuisjonen av to-én-het … skaper ikke bare tallene én og to, men også alle endelige ordenstall. (Brouwer 1983A:80)[6]

Til tross for sin noe innviklede uttrykksmåte er ideen til Brouwer klar nok: Vår oppfattelse av tid innebærer å kunne tenke at det har vært en fortid, som noe adskilt fra nåtiden. Denne oppfattelsen «deler opp» tiden mellom fortid og nåtid, som kan erstattes med ideen om tallet *én* til forskjell fra tallet *to*. Følgende illustrasjon kan vise grunntanken til Brouwers to-én-het,



hvor x1 og x2 er samme persons tanker ved to etterfølgende tidspunkter, henholdsvis t1 og t2. Vi ser at ved t1 er tanken x1. Når tiden har gått, består x2 av tanken på å ha tenkt x1. Den opprinnelige tanken, x1, forsvinner jo ikke

ut av minnet selv om tiden går. I bevisstheten oppnår man da et mangfold, gitt ved x1 og x2, som er *separert* av tiden. Legg merke til at x1 ≠ x2 og t1 ≠ t2. Ifølge Brouwer utgjør denne separasjonen, to-én-heten, en *a priori* struktur, som gir oss forståelsen av 1 og 2. Han påstår at alle matematiske grupper av enheter kan utvikles fra den grunnleggende intuisjonen (Tieszen 2008:83). Grunnideen bak Brouwers to-én-het, om at bevisstheten kan skille mellom fortid og nåtid, kan forstås uten for store utfordringer. Det som derimot *ikke* kommer tydelig frem i Brouwers teori er nøyaktig hvordan denne oppfattelsen *fører til* vår forståelse av matematikk.

Brouwer stod hardnakket imot å føye matematikken etter de fysiske vitenskaper, noe som i og for seg er et prinsipp som tar matematikken på største alvor, men det fjerner likevel ikke behovet for å drøfte årsaken til hvorfor matematikken faktisk *er* høyst kapabel til å beskrive den fysiske verdenen.

c. Intuisjon «av» og intuisjon «at»

Charles Parsons påpeker at steget fra talls gitthet (*givenness*) til kunnskap om deres eksistens ikke er så triviell som det først kan virke som (Parsons 1980:141). La oss vise dette ved å drøfte et eksempel. Ifølge Brouwer avhenger matematisk eksistens av konstruksjon; dersom noe ikke er konstruert, eller bevist, eksisterer det heller ikke. Hva da med Fermats siste teorem (at det ikke finnes noen positive heltall *x, y, z*, slik at $x^n+y^n = z^n$, der $n = \mathbb{N} > 2$)?

Som kjent skrev Fermat i herrens år 1637, i margen av sin utgave av Diophantus' *Arithmetica*, at han hadde «et virkelig bemerkelsesverdig bevis» for denne satsen, men at det ikke var nok plass i margen til å skrive det ned (Singh 1998). Fermat fikk aldri skrevet ned beviset og først i 1995 kom Andrew Wiles opp med et høyst komplisert 200-siders bevis for teoremet. Må man, slik Brouwers intuisjonisme synes å hevde, diskutere hvorvidt Fermat faktisk hadde det korrekte beviset (i form av mental konstruksjon) for å kunne avgjøre om teoremet eksisterte fra og med 1637 eller 1995? *Dersom* Fermat faktisk hadde kommet frem til beviset i hodet, eksisterte satsen siden 1637? Og hvem eksisterte den i så fall for, hvis Fermat ikke fikk skrevet ned beviset? At en matematisk likning skal være tidsavhengig er i beste fall utilfredsstillende dersom man ønsker en matematikk som er i stand til å beskrive den fysiske verdenen, poengtert av (Penrose 1989:151). Brouwer stod hardnakket imot å føye matematikken etter de fysiske vitenskaper, noe som i og for seg er et prinsipp som tar matematikken på største alvor, men det fjerner likevel ikke behovet for å drøfte årsaken til hvorfor matematikken faktisk *er* høyst kapabel til å beskrive den fysiske verdenen.

Det som mangler i Brouwers teori er ikke bare en forklaring på *hvordan* subjektet oppnår en forståelse av slike idealiserte mentale konstruksjoner, men også en redegjørelse for *hva* idealiserte mentale konstruksjoner *er*. For eksempel, når man ved *to-én-het* kommer frem til to separerte enheter, x1 og x2, hva har man faktisk kommet frem til? *Er* faktisk x2 tallet 2, eller er x2 kun en *abstraksjon* av tallet 2? Slike spørsmål fordrer å skille mellom forskjellige typer intuisjon: intuisjon *av* og intuisjon *at.* Mens intuisjon *av* omtaler objekter («jeg har en intuisjon tallet to»), kan intuisjon *at* gjelde strukturer («jeg har en intuisjon *at* det er to x»). Mens dette skillet brukes aktivt blant annet av Tieszen (1989), Isaacson (1994) og Parsons (1994), er det rett og slett uklart om Brouwers bruk av intuisjon betyr intuisjon *av* eller intuisjon *at*.

Tiezsen (1989) forklarer hvordan en distinksjon mellom de to typene intuisjoner, samt en redegjørelse for bakgrunnsoppfatninger, gjør *hva* vi får en intuisjon av mer bestemt. Parsons foreslår at nesten enhver oppfatning av bevis for nødvendige sannheter er innordnet begrepet *intuisjon at,* og hevder med det at det er en vanlig referanse innen rasjonalistisk tenkning (Parsons 1980:146). Dersom man oppfatter ved intuisjon *at* en figur er trekantet utgjør objektet for intuisjonen *figurens* abstrakte struktur eller form samt forbindelsen mellom det abstrakte og det konkrete. Jeg vil påstå at intuisjon *at* synes å være mer kompatibelt med intuisjonsbegrepet nettopp fordi man vet *hva* det abstrakte objektet er en *abstraksjon fra*, samtidig som intuisjon *at* ikke utelukkende gjelder et uavhengig abstrakt objekt. Ved intuisjon *at* noe er tilfelle, for eksempel *at* figuren har formen av en trekant, innebærer ikke intuisjon *at* per definisjon at trekanten er noe annet enn en struktur ved figuren. Intuisjon *av* synes derimot å implisere en realistisk ontologi, hvor abstrakte objekter er nettopp abstrakte og uavhengige *objekter*. Når man hevder å ha en intuisjon *av* en trekant, presenteres dette som et objekt. Som tidligere nevnt har vi for vane å omtale matematiske, geometriske og andre abstrakte objekter nettopp *som objekter*, og da gjerne som et eget og uavhengig objekt. Muligens er det nettopp av den grunn at skillet mellom intuisjon *av* og intuisjon *at* brukes om hverandre. Jeg er dog enig med Tieszen om at aktivt å skille mellom de to begrepene tydeliggjør det ontologiske standpunktet. Ettersom Brouwer *ikke* klargjør om det er snakk om intuisjon *av* eller intuisjon *at*, står det noe uklart hvilket ontologiske utgangspunkt han har.

Imidlertid kan det hevdes at Brouwer med sin «idealisering» av den menneskelige bevissthet nærmest sniker inn en realistisk ontologi. Shapiro påpeker i hvert fall at en teori som bygger på idealisering vanskelig kan hevdes å være metafysisk (og *ontologisk*, vil jeg tilføye) *nøytral* (Shapiro 2011:189). Et spørsmål som da reiser seg er hvordan matematiske objekter kan være et *resultat* av menneskelig bevissthet (som Brouwer hevder) hvis det eksisterer uavhengig fra enhver bevissthet. Selv om vi antar at Brouwers intuisjonisme legger til grunn en ontologisk realisme, og med det snakker om intuisjon *av,* er utfordringene altså langt fra over.

Gödels intuisjonsbegrep er et av de tydeligste eksemplene på intuisjon forbundet med ontologisk realisme, og heller ikke Gödels intuisjonsbegrep unngår vanskeligheter med å presentere en plausibel og tilfredsstillende forklaring på relasjonen mellom den menneskelige bevisstheten og matematikkens objektive natur.

3. Gödels intuisjon av matematiske objekter

a. Gödel om intuisjon

I motsetning til intuisjonismens tidlige fanebærer, Brouwer, som hevder at matematiske objekter er et *resultat* av mentale konstruksjoner, tilskriver Gödel bevisstheten evnen til å kunne *oppfatte* matematiske objekter. Disse objektene eksisterer *uavhengig* av vår bevissthet. Gödel var altså ingen tilhenger av Brouwers intuisjonisme, men han hevder likefremt at *intuisjon* forklarer vår tilgang til kunnskap om tall, en tilgang han sammenlikner med vår tilgang til ideer om konkrete ting.[7]

Skal man følge Gödels oppfatning av matematisk intuisjon, er ikke forskjellen stor mellom vår oppfatning av en blomsts *rødfarge* og blomstens *fem* kronblader.

Ifølge Gödel kan man *persipere* matematiske objekter på tilnærmet lik måte som man persiperer konkrete objekter. Gödels bruk av ordet «persepsjon» er altså ment å være en forklaring på hans definisjon av matematisk intuisjon, da han hevder at forskjellene ikke er store mellom persepsjon av konkrete objekter og intuisjon av matematiske objekter. Hans matematiske intuisjonsbegrep mottar ofte kritikk for å være uklart fordi det refereres til en «spesiell» innsikt. Selv Charles Parsons, som til en viss grad forsvarer Gödels matematikkfilosofi, kaller hans intuisjonsbegrep «obskurt» (Parsons 1980:146). Det er ikke nødvendigvis *intuisjonsbegrepet*, det å forstå noe direkte eller umiddelbart som troverdig, i seg selv som er problematisk, men heller det medfølgende ontologiske utgangspunktet: platonisme.

Gödel er klar på matematiske objekters uavhengige og objektive eksistens – hans matematiske filosofi står med andre ord for det vi kan kalle *ontologisk realisme*, eller *platonisme*. I motsetning til Kant, som grunner matematikken i sansningens intersubjektive anskuelsesformer, tid og rom, hevder Gödel at det «gitte» som underligger matematikken kan «representere et aspekt av den *objektive* virkeligheten, men, i motsetning til sanseformennelser, er deres tilstedeværelse i oss grunnet et annet slags forhold mellom oss selv og virkeligheten» (Gödel 1947:484). Gödels henvisning til «et annet slags slektskap mellom oss selv og virkeligheten» er nærmest blitt gjort til narr, som en slags «sjette sans», av Gödels motstandere. Det var kanskje ikke uten grunn at Gödel viste varsomhet med å publisere sine filosofiske tanker om matematikkens grunnlag. Det kan virke som om matematisk intuisjon er lite kompatibelt med en såpass sterk matematisk platonisme som Gödel legger til grunn.

Dette «spesielle» forholdet mellom oss selv og virkeligheten synes for Gödel å utgjøre matematisk intuisjon. I alle hans tre publiserte artikler omhandlende intuisjon, trekkes sterke paralleller mellom matematisk intuisjon og persepsjon av fysiske objekter (Føllesdal 1995:1– 2). Han hevder at vi har «noe lik en persepsjon» av matematiske begreper (Gödel 1947:483– 4). Når man ved hjelp av sansene oppfatter et fysisk objekt, utgjør denne persepsjonen en kognitiv relasjon til den fysiske verdenen. Den kognitive relasjonen som finner sted under matematisk intuisjon likner persepsjon, ifølge Gödel, med unntaket at relasjonen er til matematiske og andre abstrakte objekter. Skal man følge Gödels oppfatning av matematisk intuisjon, er ikke forskjellen stor mellom vår oppfatning av en blomsts *rødfarge* og blomstens *fem* kronblader.[8] Han forklarer at den eneste relevante forskjellen er at det første eksempelet er en relasjon mellom et begrep og et bestemt persipert objekt, mens det andre eksempelet er en relasjon mellom begreper (Føllesdal 1995:6). Spørsmålet kompliseres når det er snakk om *abstrakte* objekter, dette kan selvfølgelig ikke skyves under et teppe. Kan man i det hele tatt ha noe likt *persepsjon* av tall – og hva med det største primtallet? Føllesdal påpeker paradokset som oppstår i matematikeres søken etter det største primtallet (Carl W. Korsnes 2015); etter å ha bevist at det største primtallet ikke eksisterer, hva var da objektet for matematikernes tidligere søken? Og kan man påstå å ha persipert dette objektet når det ikke engang eksisterer?

b. Gödels utfordring: Å forklare matematikkens selvfølgelighet

Matematisk platonisme bygget på matematisk intuisjon mottar kritikk fra f.eks. (Hale, and Wright 2002) og (Ebert 2007), som etterlyser en ordentlig *forklaring* på vår tilgang til kunnskap om abstrakte begreper. Det er rett og slett ikke tilstrekkelig å nøye seg med Gödels beskrivelse av at matematiske aksiomer «tvinger seg på oss som sanne» på lik linje med fysiske objekter vi persiperer. Å referere til «gnister av innsikt» (*sparks of insight*) holder heller ikke mål. På dette stadiet kommer *integrasjonsutfordringen* inn i bildet.

Innen matematikkens filosofi utgjør utfordringen å kunne gi en plausibel redegjørelse for hvordan vi kan vite noe om noe vi *allerede* vet noe om, filosofisk hodebry. Peacocke (1999) gir det filosofiske problemet navnet «integrasjonsutfordringen». For vårt henseende nøyer vi oss med følgende konsise fremstilling av integrasjonsutfordringen: Det trengs en epistemologisk redegjørelse som er i stand til å *integrere* matematiske sannheter på tilfredsstillende vis, dvs. å forklare hvordan *subjektet* kan oppnå kunnskap om matematiske objekter (eksisterende i en platonsk idéverden, gitt den platonske ontologi).[9]

Fordi vi omtaler tall og abstrakte objekter som nettopp *objekter* synes vi å tilskrive dem egenskaper som konkrete objekter har.

Med sine tydelige gjentatte paralleller mellom kunnskap om konkrete fysiske objekter og kunnskapen om abstrakte matematiske objekter, behandler Gödel matematisk og ikke-matematisk diskurs på relativt lik måte. Det kan med det hevdes at Gödel trekker vår oppfattelse av matematiske objekter ned til mer eller mindre det samme «nivået» som vår oppfattelse av fysiske objekter. Årsaken til at jeg bruker uttrykket «å trekke ned til samme nivå» er at vår oppfattelse av fysiske objekter synes å fungere som en slags «mal» for hvordan oppfattelse av andre typer objekter defineres. Det er for eksempel ikke uvanlig å høre at manglende sanseinntrykk, sammenliknet med oppfattelsen av fysiske objekter, gir grobunn for tvil om at oppfattelsen er reell: «Hvordan vet jeg at jeg virkelig oppfatter et tall når jeg ikke engang kan *se* tallet? Hvor *er* tallet?» Er det noe som tilsier at man må kunne *sanse* et tall? Nei, men fordi vi omtaler tall og abstrakte objekter som nettopp *objekter* synes vi å tilskrive dem egenskaper som konkrete objekter har. Når man omtaler noe som et *objekt* faller det naturlig å stille spørsmål man stiller vedrørende konkrete objekter, som *hvor* objektet er eller *når* det er. Årsaken til at matematisk forståelse anses som en spesiell type forståelse er nettopp at matematiske objekter oppfattes som *ikke* å inneha de samme sanselige kvaliteter som konkrete objekter har. Likevel hevder Gödel at vi *kan* «persipere» matematiske objekter tilnærmet likt som vi persiperer konkrete objekter (og følgelig danner oss ideer om dem). Tanken er interessant, men Gödels sterke platonsk-ontologiske helling synes å by på utfordringer.

Matematisk platonisme kan defineres som å stå for følgende tre teser: (1) eksistens: at matematiske objekter eksisterer; (2) abstrakthet: at matematiske objekter er abstrakte; og (3) uavhengighet: at matematiske objekter er uavhengige av enhver bevissthet (Linnebo 2013). Tesene om matematiske objekters *abstrakthet* og *uavhengighet* er de som vil diskuteres mest i denne artikkelen. *Uavhengigheten* synes vanskelig å forklare, men tesen er essensiell i å forsvare matematikkens objektivitet. Om man påstår at matematiske objekter er *avhengige* av vår bevissthet, vil det være vanskelig å forklare at matematikken er noe annet enn subjektiv – slik vi har sett det er lett å lese Brouwers intuisjonisme. Hvis vi er enige om at matematiske objekter er abstrakte, og vi har allerede understreket deres essensielle ulikhet fra konkrete objekter, utgjør tesen om *uavhengighet* et forsøk på å sidestille matematiske objekter med konkrete objekter. Linnebo (2013) påpeker at tesen om matematiske objekters uavhengighet innen matematisk platonisme muligens består av *mer* enn å hevde uavhengighet fra intelligente aktørers bevissthet (som munner ut i påstanden om at uten intelligente agenters bevissthet, ville ikke matematiske objekter ha eksistert). Han understreker at tese 3 står for en analogi mellom matematiske objekter og vanlige fysiske objekter. Nøyaktig *hva* analogien består i lar han stå åpent og har behov for forklaring. Når Gödel svarer på spørsmålet om hvordan vi får kunnskap om matematiske objekter som *uavhengige* av og *adskilt* fra denne verdenen ved å referere til en persepsjons-lik intuisjon, fremstår faktisk intuisjon nærmest som en «sjette sans» – den kan jo forstås som å være uavhengig de fem «hovedsansene» vi vet om, i hvert fall.

Vi ser altså at en av hovedutfordringene ved Gödels intuisjonsbegrep oppstår ved at det ikke gis tilstrekkelig forklaring på likestillingen mellom forståelsen av abstrakte og konkrete objekter.[10] Når de abstrakte matematiske objektene tilskrives en *abstrakt* og *uavhengig* eksistens i en «avskåret» virkelighet trengs det forklaring på hvordan vi kan vite noe om dem. Det nærmeste man kanskje kommer en forklaring, eller en introduksjon til en mulig innfallsvinkel, presenteres i hans upubliserte foredrag for The American Philosophical Society, som Føllesdal drøfter i innledningen til utgivelsen av Gödels tekst: «I stedet for å prøve å fastslå matematikkens sikkerhet ved manipulasjon av fysiske symboler, foreslår Gödel 'å kultivere (utdype) kunnskap om de abstrakte begrepene selv'» (Føllesdal 1995:2). Føllesdal begrunner Gödels alternative tilnærmelse til matematikkens grunnlag med at Gödel ser en slags *selvfølgelighet* tilfalle matematiske uttrykk når meningen av disse tydeliggjøres.

En abstrakt eksistens er for Aristoteles ikke en *ontologisk separert* værensform, men heller en væren som har den konkrete verdenen som holdepunkt.

Det skal sies at Gödel ikke publiserte mye på dette emnet, kanskje fordi han først og fremst var logiker og matematiker, men muligens også grunnet sakens kompleksitet. Han skriver, «[…] spørsmålet om objekter av matematisk intuisjons objektive eksistens […] er en eksakt gjengivelse av spørsmålet om den ytre verdenens objektive eksistens […]» (Gjengitt i Føllesdal 1995:440).[11] Hans ideer rundt spørsmålet er likevel banebrytende og er blitt plukket opp (kanskje mest blant kritikere), av noen filosofer som har bygget videre på Gödels tanker om emnet. La oss se hvordan et forsiktig ontologisk skifte kan være fordelaktig for forståelsen av matematisk intuisjon.

4. Ontologisk dreining

a. Aristoteles ser vanskeligheter med platonismen

Aristoteles benekter ikke eksistensen av former, eller universalier, men avviser at universaliene er uavhengig denne verdenen og de individuelle objektene de er former av (Shapiro 2011:64). Han hevder at matematiske objekter eksisterer *i* objekter vi kan persipere, eller oppfatte:

> Det er også sant å si uten kvalifikasjoner at matematiske objekter eksisterer og er som de sies å være […]. [D]e matematiske grenene av kunnskap vil ikke være om persiperbare objekter kun fordi deres objekter viser seg å være persiperbare,… men de vil heller ikke være om andre separate objekter over og utover disse […] (1077–1078a).

Det er verdt å huske at Aristoteles' matematikkfilosofi kan leses som et tilsvar til hans læremester Platons matematikkfilosofi. Som vi vet er Platons matematikkfilosofi nært forbundet med hans filosofi om idéverdenen, hvor tall defineres som evige uforanderlige i en uavhengig værenssfære. Det som er bevart av Aristoteles' skrifter om matematikkfilosofi er begrenset, men ettersom Aristoteles, som vi ser fra sitatet ovenfor, ikke sår tvil om matematiske objekters *eksistens*, gjenstår det å avklare hans forhold til tese 2) Abstrakthet og tese 3) Uavhengighet. Den siste delen av sitatet, der Aristoteles påpeker at matematisk kunnskap ikke er om persiperbare objekter, «men de vil heller ikke være om andre separate objekter over og utover disse», synes å presentere et syn som avviker fra Platons ikke bare angående 2) Abstrakthet, men *også* angående ideen om 3) Uavhengighet. Aristoteles konstaterer matematikkens abstrakthet, men legger noe litt annet i abstrakthet enn Platon. En platonist synes å sette matematiske objekter som «primære»; en perfekt matematisk sirkel forekommer for eksempel aldri i den fysiske verdenen fordi den konkrete verdenen ikke er evig og uforanderlig. En abstrakt eksistens er for Aristoteles ikke en *ontologisk separert* værensform, men heller en væren som har den konkrete verdenen som holdepunkt.

I mine øyne innebærer et aspekt ved en platonsk analogi mellom matematiske objekter og vanlige fysiske objekter *skillet* som trekkes mellom dem. Dette skillet tilskriver begge typer objekter en egen værenssfære: den empiriske verdenen har én eksistens og matematiske objekter en annen separat eksistens, nemlig idéverdenen. Analogien er altså *ikke* at matematiske objekter er utenfor den empiriske verdenen, men at matematiske objekter og konkrete objekter tilhører hver sin uavhengige værenssfære. Ved en slik separasjon frafaller kravet om at matematiske objekter må forekomme i den konkrete, fysiske verden – de er jo evige og uforanderlige og kan bestemmes som sanne eller usanne kun på grunnlag av den uforanderlige idéverdenen. En *foranderlig* fysisk verden kan ikke påvirke matematiske objekter i idéverdenen. Aristoteles, derimot, motsier at matematiske objekter er fullstendig adskilte, og dermed må de i en forstand kunne sies å forekomme også i den konkrete verden.

Dersom abstrakte objekter også må forekomme i den konkrete verdenen er vår forståelse av abstrakte objekter avhengig av ikke bare en bevissthet, men også en (empirisk) virkelighet. En forekomst av en trekant krever et trekantet objekt, og vår forståelse av trekanten krever et bevissthet som oppfatter strukturen til objektet. Et slikt krav innebærer med andre ord (nærmest uansett i hvilken grad, vil jeg påstå) en viss avhengighet til denne verdenen. Abstraksjon som prinsipp fremstår altså ikke som et problem hos Aristoteles, men matematiske objekters abstrakte eksistens er ifølge ham *ikke fullstendig uavhengig* hverken av denne verdenen eller vår bevissthet. Jeg velger for øyeblikket å la spørsmålet om til hvilken grad det abstrakte objektet må kunne sies å forekomme stå åpent. For diskusjons skyld, la oss anta at det argumenteres for en *liten grad*. Slik jeg leser Aristoteles innebærer dette kravet at matematiske objekter forteller oss noe nettopp om den konkrete verdenen. *Hva* fortelles? Jo, matematiske objekter forteller oss om *strukturer* ved den konkrete virkelighet. Strukturer ved vanlige fysiske objekter oppfattes av vår bevissthet – Aristoteles ville kanskje ha sagt at de matematiske objektene (abstrakte strukturene) eksisterer *i* de konkrete objektene – og er objektive av den egenskap å være abstrakte, men merk at graden av abstraksjon er *minimal*.

Abstraksjon som prinsipp fremstår altså ikke som et problem hos Aristoteles, men matematiske objekters abstrakte eksistens er ifølge ham *ikke fullstendig uavhengig* hverken av denne verdenen eller vår bevissthet.

b. Parsons bringer intuisjon på banen og Gödel «ned på jorda»

En Aristoteles-inspirert matematikkfilosofi, som vi kan kalle for en slags *strukturell realisme*, synes å argumentere for matematiske objekter som «minimalt abstrakte», da det er abstraksjon av *konkrete objekter*. Parsons beskriver dem som minimalt abstrakt «siden de er typer av forekomster som er konkrete. Våre intuisjoner av dem bygger på sanseopplevelser eller på forestillinger som ser for seg sine objekter som i tid og rom, selv om det ikke er på et bestemt sted» (Parsons 1980:160).[12] Ved minimal abstraksjon hevder Parsons at grunnlaget for matematisk intuisjon er subjektets vanlige sanseopplevelser eller fantasi. Det synes for meg opplagt at dersom man lar grunnlaget for matematisk intuisjon være vanlige sanseopplevelser, blir utfallet en noe mindre platonsk ontologi. Dersom vi antar at matematiske objekter er minimalt abstrakte, da de er typer (*types*) av konkrete forekomster (*tokens*), og med det ikke er fullstendig uavhengig hverken bevisstheten eller den konkrete virkeligheten, kan vår tilgang til kunnskap om matematiske objekter forklares ved intuisjon.

Aristoteles synes å hevde at det er gjennom å kontemplere over konkrete objekter vi oppnår kunnskap om matematiske objekter, et syn som reflekterer i sammenlikningen mellom matematikeren og fysikeren, som vi husker fra denne artikkelens introduksjon. Charles Parsons gjør en god innsats i sitt forsøk på å fjerne matematisk intuisjons stempel som en «spesiell» egenskap, eller «særegen» kognitiv avdeling (Parsons 1980:154–155). I sitt forsøk på å få Gödels intuisjonsbegrep «ned på jorda» understreker han blant annet at «*Det som oppfattes intuitivt* avhenger av begrepet som frembringes til situasjonen av subjektet» (Parsons 1980:162).[13] Da er jo tross alt ikke matematiske objekter *fullstendig* uavhengige. Det kan argumenteres for at en Aristoteles-inspirert strukturell realisme legger nettopp *intuisjon* til grunn for vår matematiske forståelse. Hvis matematiske objekter har gjennomgått den forsiktige, dog essensielle, ontologiske dreiningen fra sterk platonisme til (aristotelisk) strukturell realisme blir intuisjon en mer plausibel forklaring. Ved strukturell realisme kan matematiske objekter beskrives som å ha følgende ontologiske status: Matematiske objekter er minimalt abstrakte objekter (det vil si *typer* av konkrete *forekomster*) og er til en viss grad avhengig av både en intelligent bevissthet og den konkrete virkeligheten. Tilgangen vår til disse minimalt abstrakte strukturene kan forklares ved umiddelbar og troverdig intuisjon av typer eller strukturer ved den sansbare virkeligheten. Intuisjon får ved strukturell realisme ikke lenger den «mystiske» rollen å skulle kunne nå en separert virkelighet av ideer, som den får ved sterk platonisme. I stedet fungerer matematisk intuisjon som en oppfattelse av strukturer eller typer, en oppfattelse som ikke er uavhengig vår sansing av den konkrete virkeligheten.

Parsons påpeker dog at intuisjon av matematiske objekter som «minimalt abstrakte» ikke tar oss særlig langt, ikke lenger enn forbi elementær syntaks eller kanskje tradisjonell geometri. Hans poeng understreker utfordringene som strukturell realisme står overfor og spørsmål som står ubesvarte.[14]

5. Konklusjon

Det kan hende at Aristoteles så nødvendigheten av en viss form for forekomst og avhengighet til den konkrete verdenen nettopp fordi han så vanskeligheten ved å gi en plausibel forklaring på vår bevissthets tilgang til en «avskåret» virkelighet (idéverdenen). Det kan vi bare komme med antagelser om. Forhåpentlig kommer det dog frem av artikkelen et plausibelt argument for at ontologien til en «strukturell realisme», der bevisstheten har som rolle å strukturere ut i fra det man sanser eller ser for seg, er mer kompatibel med ideen om matematisk intuisjon.

La det være klart at den overstående korte drøfting av utvalgte punkter i viktige filosofers ideer om intuisjon ikke yter dem den grundige gjennomgang de fortjener. Forhåpentlig har likevel den korte gjennomgangen av det som presenteres som forklaringsutfordringer ved Brouwers intuisjonisme og Gödels intuisjonsbegrep vist at ontologien som legges til grunn er essensiell i diskusjonen av matematisk intuisjon.

Til slutt så vi, om ikke annet, at en forsiktig ontologisk «dreining» førte til betydelige forandringer i intuisjonsbegrepet. Ontologien til den Aristoteles-inspirerte strukturelle realismen legger matematisk intuisjon til grunn som et *strukturerende* element og med det er altså uavhengighetstesen mindre sterk, da de abstrakte strukturene må struktureres av intuisjonen. Matematisk intuisjon synes med det å fremstå som mindre «obskur», da den ikke skal fungere som bindeledd mellom den fysiske verdenen og en separert idéverden. Det virker som om filosofiske studier av matematisk intuisjon kan dra nytte av å studere også det aristoteliske alternativet til den rådende platonismen.

LITTERATURLISTE

Aristoteles, 1941, *Physica*, I McKeon, R. (red.) *The Basic Works of Aristotle,* 18. utg., Random House, New York.

Benacerraf, P. 1973, *Mathematical truth*, i *Philosophy of Mathematics*, Benacerraf, P. og Putnam, H. (red.), 2. utg., Cambridge University Press, Cambridge, s. 403–420 .

Brouwer, L.E.J. 1983A, *Intuitionism and formalism*, i *Philosophy of Mathematics*, Benacerraf, P. og Putnam, H. (red.), 2. utg., Cambridge University Press, Cambridge, s. 77-89.

——. 1983B, *Consciousness, philosophy, and mathematics*, i *Philosophy of Mathematics,* Benacerraf, P. og Putnam, H. (red.), 2. utg., Cambridge University Press, Cambridge, s. 90-96.

Ebert, P.A. 2007, *What mathematical knowledge could not be*, i *Aporia, Journal of the Philosophy Undergraduate Society in St Andrews*, bd. 1, nr. 1, s. 46–70.

Føllesdal, D. 1995, *The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy*, i *Collected Works of Kurt Gödel,* Dawson, J., Warren, G., Parsons, C., Solovay, R. (red.), vol. III, Oxford University Press, Oxford, s. 364–374.

Føllesdal, D. 2015, *'Edmund Husserl's Phenomenology' - Seminar 2/5* [on line video], Carl W. Korsnes (ed.). Tilgjengelig fra: <https://www.youtube.com/watch?v=UckPLMkeqws> [05.08.15].

Gödel, K. 1947, *What is Cantor's continuum problem?*, i *Philosophy of Mathematics,* Benacerraf, P. og Putnam, H. (red.), 2. utg., Cambridge University Press, Cambridge, s. 470–485.

Iemhoff, R. 2015, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics*, i Zalta, E.N. (red.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy, tilgjengelig fra: <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/intuitionism/>, [27. jul. 2015].

Isaacson, D. 1994, *Mathematical Intuition and Objectivity*, i *Mathematics and Mind*, George, A. (red.), , Oxford University Press, Oxford, s. 118-140.

Lear, J. 1982, *Aristotle's Philosophy of Mathematics*, i *The Philosophical Review*, vol. 91, nr. 2., s. 161–192.

Linnebo, Ø. 2006, *Epistemological Challenges to Mathematical Platonism*, i *Philosophical Studies, v*ol. 129, nr. 3, s. 545–574.

——. 2013, *Platonism in the Philosophy of Mathematics*, i Zalta, E.N. (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, tilgjengelig fra: <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/platonism-mathematics/>, [25. jul. 2015].

Parsons, C. 1994, *Intuition and Number*, i *Mathematics and Mind,* George, A. (red.), Oxford University Press, Oxford, s. 141–157.

——. 1980, *Mathematical Intuition*, i *Proceedings of the Aristotelian Society,* vol. 80, s. 145–168.

Penrose, R. 1989, *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and The Laws of Physics,* Oxford University Press, Oxford.

Peacocke, C. 1999, *Being Known,* Oxford University Press, Oxford.

Shapiro, S. 2011, *Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics,* Oxford University Press, Oxford.

Singh, S. 2004, *Fermats siste sats,* Aschehoug, Oslo.

Tieszen, R.L. 1989, *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*, Springer, Dordrech, Nederland.

——. 2008, *The intersection of intuitionism (Brouwer) and phenomenology (Husserl)*,i *One Hundred Years of Intuitionism (1907 – 2007): The Cerisy Conference*, van Atten m. fl. (red.), Springer, Boston, s. 78–95.

Wang, H. 1990, *Reflections on Kurt Gödel,* MIT Press, Cambridge.

NOTER

[1] En oppfatning som deles av bl.a. (Penrose 1989:148-149) og (Lear 1982)

[2] Alle sitater fra engelske kilder er oversatt til norsk av forfatter.

[3] Noe som reflekteres i det at vi kan snakke om «en firkant» eller kan stille spørsmålet «hva *er* tallet to?».

[4] Fortalt av Dagfinn Føllesdal i Øystein Linnebos FIL4405, våren 2015, IFIKK, UiO

[5] Norsk oversettelse av Bouwers begrep "two-oneness"

[6] Engelsk versjon: "[Intuitionism] considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while remaining separated by time, as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking, the intuition of the bare two-oneness. … This intuition of two-oneness … creates not only the numbers one and two, but also all finite ordinal numbers."

[7] Med andre ord har Gödel en ganske annerledes forståelse av *intuisjon* enn Brouwer.

[8] Gödel uttrykte selv dette ifølge (Wang 1990:202) og hevdet han hadde fått sammenlikningen fra Bernay.

[9] Etter beskrivelse av (Ebert 2007:5), som skriver utfyllende om emnet.

[10] Benacerraf hevder at «accounts of truth that treat mathematical and nonmathematical discourse in relatively similar ways do so at the cost of leaving it unintelligeble how we can have any mathematical knowledge whatsoever ...» (Benacerraf 1973:403).

[11] Engelsk versjon: " […] the question of the objective existence of the objects of mathematical intuition ... is an exact replica of the question of the objective existence of the outer world [...]."

[12] Engelsk versjon: "since they are type of tokens which are concrete. Our intuitions of them are founded on sense-experience or on imaginings which imagine their objects as in space and time, even if not at any particular location."

[13] Engelsk versjon: "*What is intuited* depends on the concept brought to the situation by the subject."

[14] Den interesserte leser kan ty til (Franklin 2014), en bok om nettopp 'strukturell realisme', eller aristotelisk matematikkfilosofi. Edmund Husserls reduksjoner presentert i *Ideen* er for øvrig også inne på liknende tanker.