MATEMATIKK ER EN KAMPKUNST

Av Snorre H. Christiansen

Matematikk er en kampkunst, på mer enn én måte. Matematikere redder liv og de tar liv, man trenger ikke gå lenger enn til *The imitation game*, filmen om Alan Turing og spesielt hans rolle i annen verdenskrig, for å illustrere dette. Men kampene er mangfoldige og ikke nødvendigvis åpenlyse. Hvilke våpen stiller så denne disiplinen med og hvilken fred kan den gi oss mennesker?

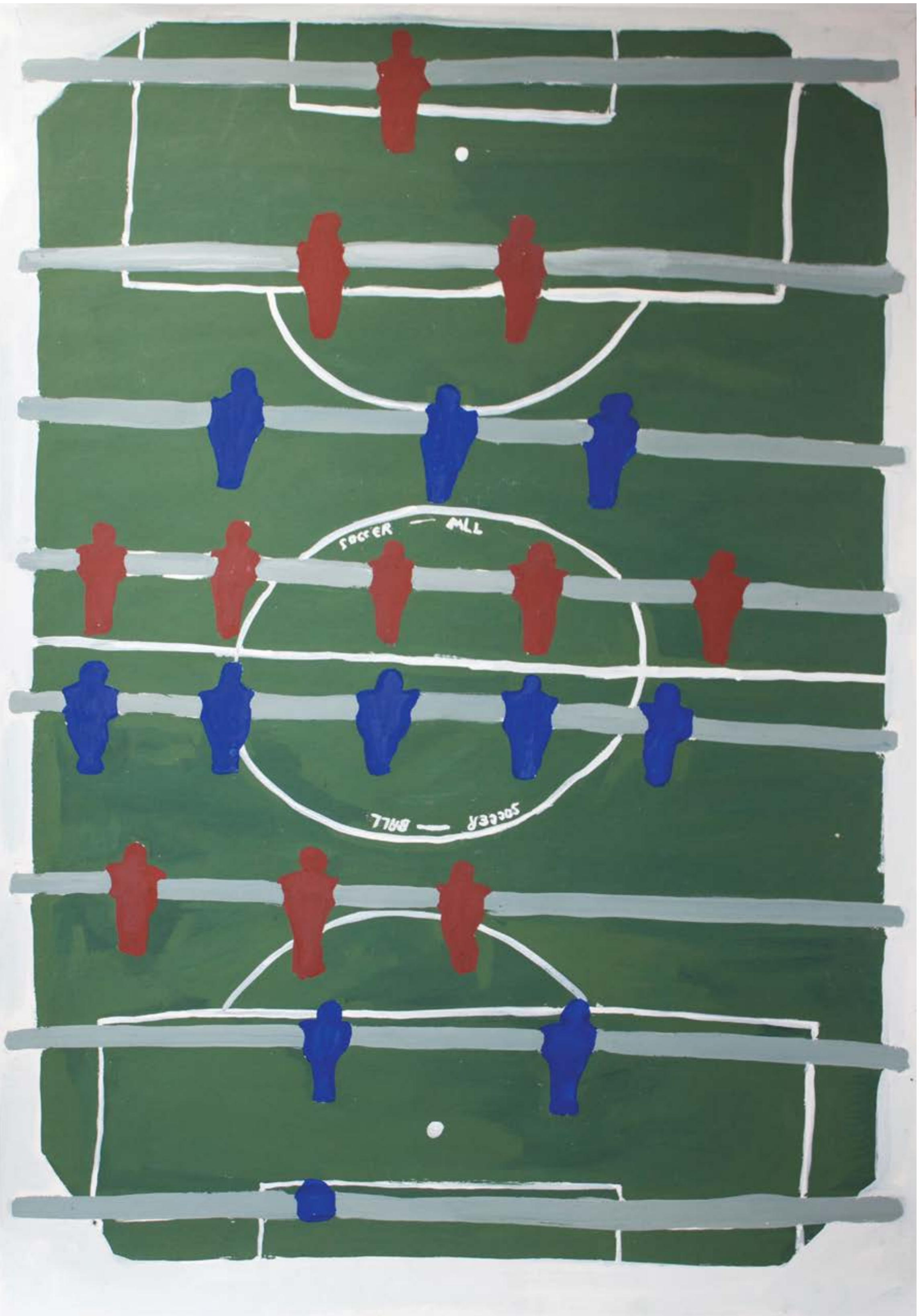
Matematikk er kunsten å tenke ved hjelp av formaliserte systemer. Matematikk har, i likhet med filosofi og naturvitenskap, sin opprinnelse i en undring over observerte lovmessigheter. De første tegnene til matematisk metode var en klargjøring av hva som utgjør gyldig argumentasjon og oppfinnelsen av diverse regnemetoder. Den første tråden, om hvordan vi tillater oss å bruke språket, fører frem til moderne logikk og mengdelære. Men heller enn at matematikk bør ses på som en gren av logikken, er matematisk logikk essentielt en anvendelse av matematisk tankegang på symbolstrenger, slik de fremstår i *formelle* språk. Matematisk logikk er en spesiell gren, fordi den inneholder miniatyrer av matematikken, og har avklart begreper som sannhet og bevis.[2]

Det er nettopp bevisføring som gir matematikeren en trygg grunn å stå på. Men om bevis er gyldige dersom de kan oversettes til formelle bevis, så er det også et poeng at oversettelsen ville gjøre dem uforståelige for mennesker (Arnold, Atiyah, Mazur 2000).[3] Det vi jakter på i hverandres skrifter er intuisjoner og forståelse. Disse er vanskelige å definere, men vi kan assosiere dem med evnen til å reflektere over definisjoner (herunder utforske eksempler, moteksempler og varianter) og gleden av å se logiske sammenhenger, fra de *såkalt* trivielle, til *korrespondanser* på tvers av fagfelt (Lang 2005:612–622).[4] Hvordan nå enn idéer gjemmer seg i teoremer og bevis,[5] er mendgespråket essentielt for måten matematikere kommuniserer på.

Den andre, regnetekniske, tråden fører frem til algoritmer og informatikk. Det fortettede symbolspråket som matematikere har innført for å utføre regnestykker, har blitt videreutviklet til dagens programmeringsspråk. Koding og tungregning gjør det mulig å utføre regnestykker, både symbolske og numeriske, av en helt annen karakter enn tidligere. Disse trådene er selvfølgelig flettet tett sammen. Bevisføring kan ses på som regning med idéer, effektiv regning er enklere i tilpassede språk og vi både kan og bør bevise egenskaper ved våre algoritmer. Formelle språk bør ses under ett, i tråd med Leibniz' drøm om en «charecteristica universalis».

Matematikken utvider vår evne til rasjonell forståelse og forfiner vår intuisjon, på måter som gjør det mulig å utforske hittil ukjent territorium. Kavli-prisen nevner for eksempel uendelig små, store, eller komplekse fenomener, og da spesielt nano-, astro- og nevro- vitenskap, som våre store utfordringer.[6] Kvantefeltteori er et eksempel på et formalisert system man kan regne med, uten at det hviler på et solid matematisk fundament. Helt frem til slutten av det 19. århundre var situasjonen tilsvarende for kalkulus (Barrow, Green, and Leader 2008: 117).[7] Å lage et tilfredsstillende fundament for kvantefeltteori er blant matematikeres store ambisjoner for det 21. århundre. Clay Mathematics Institute har også lovet ut dusør for oppdraget.[8] I matematisk biologi vet vi kanskje ikke engang hva de fruktbare spørsmålene er. Ei heller vet vi hvilke krefter som vil bli sluppet fri av å avsløre noen av livets gåtefulle mekanismer.

Som vitenskap har matematikken utviklet seg fra en refleksjon over størrelse og form, til en læren om relasjoner, strukturer og algoritmer. En første innsikt er at matematiske objekter forstås best i måten de relaterer seg til hverandre, heller enn i sin ensomhet. Eksempler på relasjoner er funksjoner, komposisjonslover og ordener. De to siste kan forøvrig tolkes som eksempler på det første.



Illustrasjon: Liv Karin Ertzeid

Komposisjonslover tar to objekter av en gitt type og assosierer med dem, et nytt objekt av samme type. En ordensrelasjon uttrykker, for to gitte objekter av samme type, hvorvidt den ene er større enn den andre på noen måte. Komposisjonslover kan ses på som det grunnleggende begrepet i algebra mens ordensrelasjoner har en tilsvarende plass i forhold til analyse. Begge grenene, og gjerne i kombinasjon, er opptatt av å belyse geometrien. Sistnevnte var både bemerkelsesverdig anvendbar og abstrakt. Navigasjon til sjøs, ved hjelp av stjernene, er et eksempel på tidlig anvendelse. Spekulasjon over geometriske objekters natur var en av kildene til Platons idélære (se Næss 2008:139).

En slik inndeling i algebra, analyse og geometri fungerer godt på lavere nivå, men er mindre relevant på høyere nivå, hvor grener hybridiseres, slik som i algebraisk topologi, eller knyttes nærmere anvendelsesområder, om de så er bølgene i nordsjøen eller kreftregisteret. Matematikere liker å tenke på seg selv som mønsterfinnere (Hardys 1992), og man kan gjerne kalle slike regelmessigheter for strukturer.

Begrepet struktur kan også brukes mer restriktivt, slik tilfellet er i kategoriteori og objektorientert programmering. Mengder med en gitt struktur (f.eks. en komposisjonslov) utgjør gjerne en kategori, og kategoriteori hjelper til med å klargjøre definisjoner og organisere flere typer matematiske strukturer (spesielt hjelper den med å overføre intuisjoner og tenkemåter mellom algebra og analyse). På tilsvarende måte er objektorientering nøkkelen til å organisere store kildekoder.

Funksjonsbegrepet er kanskje det mest elementære i matematikk, i den forstand at alt bygger på dens alkymi. En funksjon tilordner et nytt objekt til hvert objekt av en viss type. Alle funksjoner er ikke konstruktivt definerbare, men for de som er det, er det som regel mange måter å regne dem ut på, noen vesentlig mer effektive enn andre. Etterhvert som mer komplekse fenomener beskrives matematisk, som funksjonelle sammenhenger i uforutsigbare kombinasjoner, blir det nødvendig med nye avanserte algoritmer for å regne på dem. Programmeringsferdigheter blir da mer ettertraktet enn regneferdigheter. Fremtidens utfordringer krever en dypere forståelse av hvordan algoritmer fungerer og utvikles. Den forståelsen kan ikke bare være matematisk: algoritmenes inntog i våre dagligliv kjenner vi allerede på kroppen som muligheter, lengsler og avhengigheter, på godt og vondt.

Matematiske språkformer, konsepter, metoder og modeller er grunnleggende for de andre vitenskapene og utvikles i samspill med dem. Anvendelser og modeller er flertydige uttrykk. Man kan se på «ren» matematikk som en anvendelse av matematikk der estetiske prinsipper leder sannhetssøket.[9] Man kan se på aritmetikk som en modell for det å telle og man kan se på algebra som en modell for aritmetikk. Abstraksjonsprosessen kan føre en langt av sted, men også nærmere anvendelsene. Logikere bruker ordet modell om en matematisk miniatyrverden beskrevet av et formelt språk. Det vil som regel være flere forskjellige modeller for et gitt språk. Forholdet mellom språk og mer eller mindre matematiske verdener er i seg selv også gjenstand for matematisering. Hva som er ramme og hva som er bilde er ikke alltid godt å si, og avhenger kanskje av hvilken side av speilet man står på! Vi velger å bruke ordet modellering i forbindelse med hvordan matematikken kommuniserer med andre vitenskaper.

Man kan for eksempel modellere en golfball (Arnold 2012) som et punkt som beveger seg i et tredimensjonalt rom, etter en differensiallikning oppkalt etter Newton. Man kan velge om man vil ta hensyn til luftmotstand eller ei og man kan ha flere modeller for sistnevnte. Man kan prøve å ta hensyn til usikkerhet knyttet til vindstyrke. Man kan kanskje erstatte punktet med en sfære og uttrykke at den beveger seg i en fluide beskrevet av partielle differensiallikninger oppkalt etter Euler. Man kan studere hvordan golfballen deformeres i det den blir slått ut, kanskje sprekker den, eller kanskje fortsetter den å vibrere under sin flukt. I såfall kan man regne ut frekvensene, og muligens høre dem. Man kan se på hvilken effekt de små gropene i overflaten til golfballen har på slagets presisjon, via turbulensen de skaper. Gitt modeller for alle usikkerhetsmomentene kan man studere sannsynlighetsfordelingen for nedslagspunktet. Gitt all denne kunnskapen kan man gjøre optimale valg på golfbanen.

Man snakker om hierarkier av modeller, med ulik kompleksitet og ulik grad av prediksjonskraft. Modeller kan være diskrete eller kontinuerlige, deterministiske eller stokastiske, og gjerne en kombinasjon av de fire med mulighetene det gir.[10] Man kan representere tid som punkter i en kalender og rom som adresser i en katalog, eller man kan se på alt som noe som flyter mer som en elv, og for de som vil stige ned i den eller ikke, kan badetemperaturen fremstå som forutbestemt av initialbetingelser eller være kjent bare som sannsynligheter. Det kan være nødvendig å bruke flere modeller samtidig, for eksempel på forskjellige skalaer. Virvler i vann flytter energi mellom mikro- og makroskopiske strukturer. Hvordan fenomener på forskjellige skalaer påvirker hverandre er til den dag idag et sentralt og uløst problem.

Newtons nyvinning var imidlertid av en dypere karakter enn ballistikk anvendt på en peripatetisk sport. Han innførte kalkulus, et nytt matematisk språk, med dertil hørende teoremer og regnemetoder. Han postulerte nye naturlover som kunne uttrykkes i dette språket. Det gjorde det mulig å se eksperimenter på jorden i samme rammeverk som bevegelsene til himmellegemene, og gjøre forbausende presise prediksjoner i begge domener. Denne matematisk-fysiske teorien, godt hjulpet av mer reduksjonistisk modellering, ga ikke bare moment til den industrielle revolusjon, den forandret vårt verdensbilde. Kvantemekanikken, symbolisert ved Schrödinger-likningen, utgjorde et tilsvarende paradigmeskifte i vår forståelse av verden, og banet vei for atomfysikken og dens teknologiske korollarer. Muligens krever matematiseringen av biologien et nytt paradigmeskifte. Muligens vil klimaforandringene kreve et nytt Manhattan-prosjekt.

Matematikk, krig og etikk. Fra Arkimedes til von Neumann, har matematikere vært rådgivere for konger og presidenter, og bidratt til våpenutvikling og krigsstrategier. Per idag er NSA verdens største ansetter av matematikere. G. H. Hardy, kanskje mest kjent for sin manglende evne til å forutsi tallteoriens militære potensialiteter(Hardy 2008:51–52), oppgir ikke desto mindre i sine memoarer at hans opprinnelige motivasjon for å drive med «pure mathematics», var at det ga ham muligheten til å «beat other boys». Krystallkulen hans var muligens forkludret av et idyllisert syn på tallteoriens opprinnelse og historie. François Viète, oppfinneren av moderne algebra, var kong Henrik IV av Frankrikes kryptograf, lenge før RSA ble standarden for fortrolig kommunikasjon. I sitt bidrag til boken, utgitt i forbindelse med at år 2000 ble erklært matematikkens år, setter Vladimir Arnold det hele på spissen og hevder at all moderne matematikk er direkte koblet til krigføring (Arnold, Atiyah and Mazur 2000) Roger Godement har inkludert en velinformert avhandling om matematikeres plass i det militærindustrielle komplekset i sin lærebokserie om Matematisk Analyse (1998).

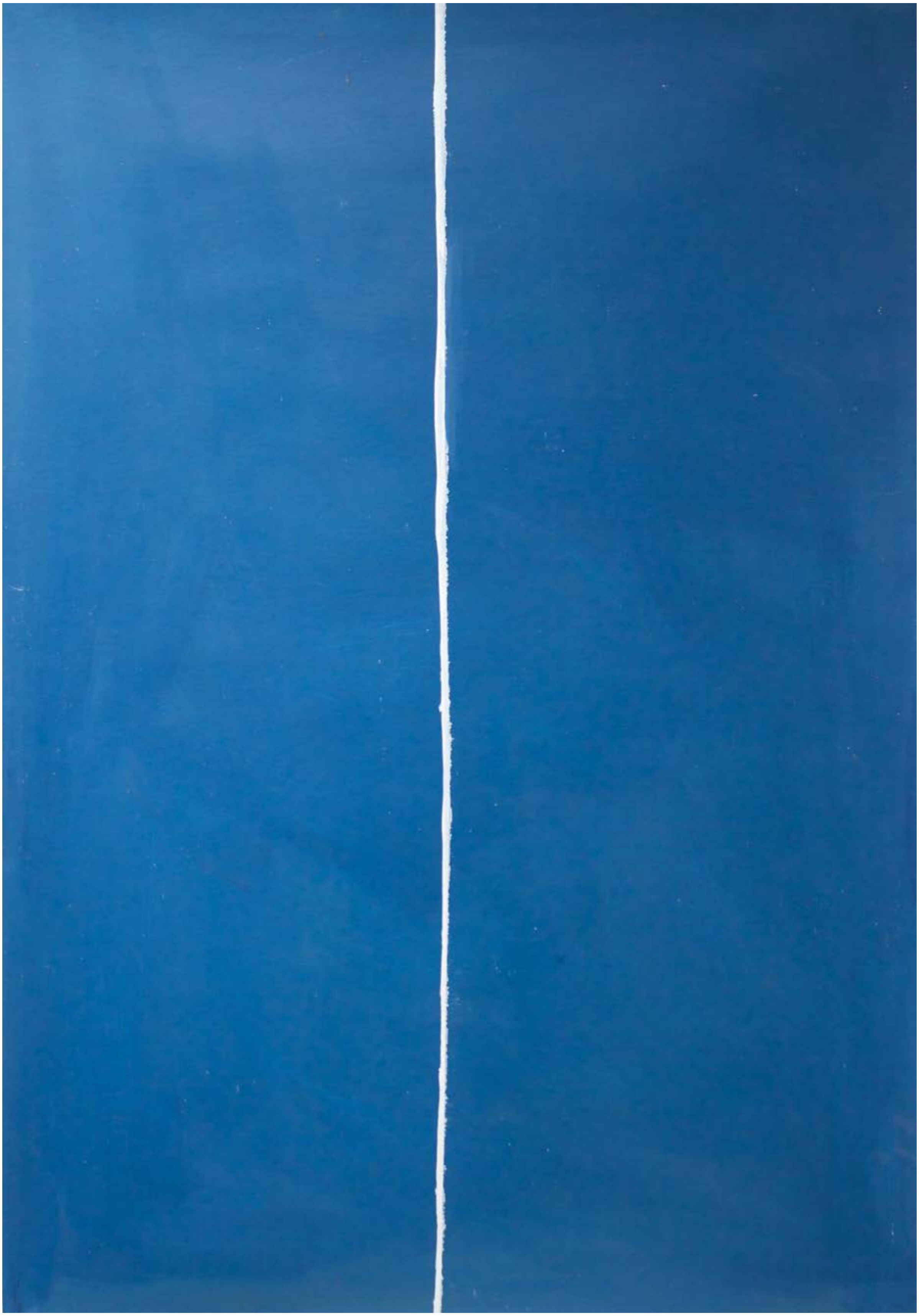
Andre «rene» matematikere er heller ikke fremmede for krigens retorikk. Slik beskriver Claude Chevalley og André Weil deres foregangsmann, Hermann Weyl: «A proteus who transforms himself ceaselessly in order to elude the grip of his adversary, not becoming himself again until after the final victory» (Weyl 2012:1). Vi noterer at de trekker metaforene i retning av det filosofiske og guddommelige, i tråd med østerlandske prinsipper om kampkunst. Alle disse matematikerne så på matematikk som del av et intellektuelt og kulturelt landskap, og bidro til dette ikke bare med matematikk.

Euklids verk *Elementene* var lenge kroneksemplet på matematisk tankegang og inspirerte tenkning langt ut over matematikkens grenser. Da Abraham Lincoln ble spurt om hvorfor han hadde ført opp på sin CV at han hadde lest Elementene, svarte han at han hadde ønsket å bli advokat, at som advokat var det nødvending å kunne argumentere, og at han ikke kunne tenke på noen bedre kilde for å lære argumentasjonsteknikk (Kaboyashi 2014:1343–1344). Spinoza presenterer sitt hovedverk «Ethica» som «ordine geometrico demonstrata»,–altså bevist på geometrisk vis. Ikke alle matematikere er overbevist om at han lyktes i sistnevnte, men hans holistiske verdenssyn skinner kanskje klarest av alle den dag i dag. Disse eksemplene tyder på at innsikt i matematisk tankegang kan være til inspirasjon også når hovedanliggendet er å definere det gode liv og å styre staten.

Matematikerens makt er skremmende. St. Augustin har uttalt: «Good Christians should avoid mathematicians and all impious soothsayers, taking care not to consort with those demons and deceptive spirits whose society will entrap them» (Hirsch 2008).[11] Hypatia, filosof, matematiker og dertil kvinne, ble i år 415 brutalt myrdet av en folkemengde oppildnet av munker, i et politisk oppgjør mellom rivaliserende kristne grupperinger med ulikt syn på fritenkningens verdi. At matematikk kan være så subversivt at livet står på spill, har både Kantorovitch (under Stalin) og Monge (under den Franske revolusjon) måttet ta hensyn til (Bartabas and Vilani 2014:31–32)[12].

Finanskrisen anno 2008 skyldes ihvertfall delvis at finansielle instrumenter ble solgt til folk som ikke forsto matematikken som lå bak og dens begrensninger. Dermed hadde de ikke mulighet til å vurdere hvilken risiko de tok. Viljen var også svak. Regningen for etegildet ble jevnt fordelt, og ikke bare på bordgjestene.

Jean Leray, som på 30-tallet sto for milepæler innen teorien for ikke-lineære partielle differensiallikninger og tolkningen av turbulens, valgte, da han ble holdt fange i Østerrike under annen verdenskrig, å presentere seg som spesialist i topologi, i frykt for at hans mer anvendbare kunnskaper skulle misbrukes av nazistene. Han levde opp til sitt ord, for under fangenskap organiserte han forelesninger og oppfant knipper og spektralsekvenser, begreper som senere har blitt sentrale for denne grenen av matematikken. Alexandre Grothendieck, spektralsekvensmagiker og en av det 20. århundrets matematiske visjonærer[13] gikk bort for i 2014. I kjølvannet av –68 revolusjonen, ble han så ubekvem med det vitenskapelige miljøets etikk at han etterhvert valgte å bryte helt med det. I denne nye perioden av hans liv var han med på å grunnlegge «Survivre et vivre», en aktivistgruppe med prinsipper ikke ulike Arne Næss' økosofi.



 Illustrasjon: Liv Karin Ertzeid

Matematikk og intet. Man blir ikke matematiker med mindre man er villig til å leke med definisjoner og forfølge tankerekker til det absurde. Vi forfekter ikke bare det å starte med blanke ark. Vi påstår at ingen annen disiplin kommer nærmere det å skape noe av intet. Matematiske objekter kan gjenspeile språket vi definerer dem med; når vi skriver, skriver vi gjerne at vi skriver. I selvreferansenes land lever vi på kanten av selvmotsigelser. Matematikk er en meditasjon over selvet og væren, et søk etter å gjenforenes med den perfekte kunnskap, det tapte paradis. Ser vi fremover er det et åpent spørsmål om den vil gi oss ro i sjelen, men vi kan glede oss over at store tenkere har etterlatt seg besynderlige spor på deres ferder kring et av den menneskelige erkjennelses ytterpunkter.

Vi avslutter skrivingen med en matematisk vinklet gjendiktning av Lao Tzu (2009).

Veien som veilegges
Er ikke den endelige vei
Navnet som nevnes
Er ikke det endelige navn
Stillhet er opphav til himmel og jord
Kall er mor til multiplisitet
I null ser vi unnfangelse
I én ser vi fullbyrdelse
Disse to : samme kilde
Kallet med ulike navn
Sammen kaller vi dem mørke
I mørkere mørkhet
Unnfanges uendeligheten

LITTERATUR

Arnold, D.N. 2012, «The flight of a golf ball» in *The Princeton Companion to Applied Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Arnold, V.I. *et al.* 2000, *Mathematics: frontiers and perspectives*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Bartabas & Villani, C. 2014, *Comment conjuguer passion et création: Dialogue inattendu entre un artiste et un scientifique tale tueux,* Caracole, Favre.

Godement, R. 1998, *Analyse mathématique*: *Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes*, Springer Verlag, Berlin.

Gowers, T., Barrow-Green, J. Leader, I. 2008, *The Princeton compa ion to mathematics*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Hardy, G.H. 1992, *A mathematician's apology*. Canto, Cambridge University Press, Cambridge.

Kobayashi, S. 2014, *Two essays from mathematicians who lost their faces*, 61(11):1343–1344.

Krieger, M.H. 2015, *Notices Amer : Math. Soc.*, 52 (3):334–341.

Lang, S. 2005, *Notices Amer: Math. Soc.*, 52(6):612–622, 2005.

Næss, A. 2008, *Filosofiens historie*. Universitetsforlaget, Oslo.

Weyl, H. 2012, *Levels of infinity, Selected writings on mathematics and philosophy*. Dover publications, New York.

Rota, G.C. 2008, *Indiscrete thoughts*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.

Tzu, L. 2009, *Taoteching*: *With selected commentaries of the past 2000 years*. Copper Canyon Press, Seattle.

NOTER

[1] Jeg vil takke Knut Mørken for å ha skapt en arena for diskusjon om hva matematikk handler om, i forbindelse med undervisningsreformen InterAct ved Universitetet i Oslo, Christin Borge for utallige konversasjoner om temaet, og Pamela Hiley ved Norsk Taiji Senter for inspirasjon og for gleden av å synke stadig lavere!

[2] For de fleste matematikere er dens resultater først og fremst negative. For eksempel er det vist at i alle sterke nok aksiomatiske systemer vil det være påstander som hverken kan bevises eller motbevises.

[3] «Human mathematics is a sort of dance around an unwritten formal text, which if written would be unreadable» skriver David Ruelle i sitt bidrag.

[4] André Weil har skrevet til sin søster, filosofen Simone Weil, om analogiers rolle i hans matematikk [8]. På bakgrunn av slike intuisjoner formulerte Weil de formodingene Grothendieck senere brukte som rettesnor for sitt program for aritmetisk geometri. At Notices of the AMS valgte å publisere dette brevet ble gjenstand for noe så sjeldent som en åpen matematisk kontrovers.

[5] «We say that a proof is beautiful when it gives away the *secret* of the theorem…» (min uthevning) (Rota 2008:132)

[6] Se kavliprize.org for mer informasjon.

[7] Se *The development of rigor in analysis* av Tom Archibald.

[8] Dette og de andre Millenium Problemene er beskrevet på claymath. org.

[9] Jf. bruken av ordet «utelukkende» i plakaten i inngangspartiet på N. H. Abels hus.

[10] Dette er forøvrig en illustrasjon på forskjellen mellom 2 + 2 og 2 × 2.

[11] Det latinske ordet «mathematici» i originalteksten hadde en videre betydning enn det vi idag forbinder med «matematikere« og inkluderte spesielt astronomer. Det er mulig det først og fremst var astrologer og numerologer St. Augustin ville advare mot.

[12] Resten av denne dialogen, mellom en matematiker og en kunstner, i et buddhistisk tempel utenfor Paris, er også verdt å lese.

[13] The Grothendieck Circle er dedikert til å spre informasjon om hans liv og verk.